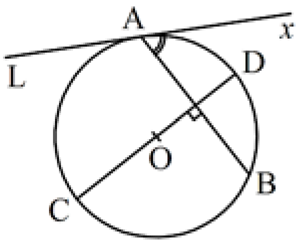
۱

گزینه ۲

$$\hat{A}_{\text{ظلی}} = \frac{\overset{\frown}{ADB}}{۲} = ۵۴^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{ADB} = ۱۰۸^\circ$$

می‌دانیم قطر عمود بر هر وتر، وتر و کمان نظیرش را نصف می‌کند.



$$\overset{\frown}{DB} = \frac{\overset{\frown}{ADB}}{۲} = ۵۴^\circ , \overset{\frown}{CBD} = \overset{\frown}{DB} + \overset{\frown}{BC} = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۱۸۰^\circ - ۵۴^\circ = ۱۲۶^\circ$$

۲

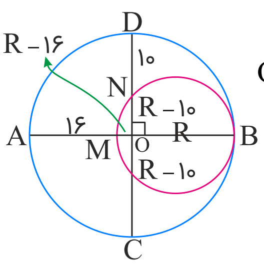
$$x(x + x + ۲) = (x + ۱)(x + ۱ + ۲x - ۴)$$
$$\Rightarrow x(۲x + ۲) = (x + ۱)(۳x - ۳)$$
$$\Rightarrow ۲x(x + ۱) = ۳(x + ۱)(x - ۱) \Rightarrow ۲x = ۳(x - ۱)$$
$$\Rightarrow ۲x = ۳x - ۳ \Rightarrow x = ۳$$

۳

گزینه ۳

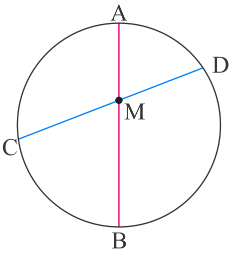
شعاع دایرهٔ بزرگ را R فرض می‌کنیم. پس $OB = R$، $OM = R - ۱۶$ و $ON = R - ۱۰$، ضمناً چون دایره‌ها مماس داخل‌اند، BM قطر دایرهٔ کوچک‌تر است و چون $BM \perp CN$، $OP = ON = R - ۱۰$ است.

حال طبق روابط طولی در دایرهٔ کوچک، داریم:



$$ON.OP = OB.OM \Rightarrow (R - ۱۰)^۲ = R(R - ۱۶)$$
$$\Rightarrow R^۲ - ۲۰R + ۱۰۰ = R^۲ - ۱۶R \Rightarrow ۴R = ۱۰۰$$
$$\Rightarrow R = ۲۵ \Rightarrow BM = ۲R - ۱۶ = ۳۴$$
$$\text{شعاع دایرهٔ کوچک} = \frac{۱}{۲}BM = ۱۷$$

۴ گزینه ۱



M وتر CD را به نسبت ۳ به ۸ تقسیم کرده است، پس می‌توان گفت: $MC = ۸x$ و $MD = ۳x$ و $CD = ۱۱x$. طبق روابط طولی دایره داریم:

$$MC \times MD = MA \times MB$$
$$۸x \times ۳x = MA \times MB \Rightarrow MA \times MB = ۲۴x^{۲}$$

از طرفی:

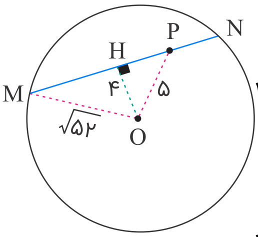
$$CD = ۱/۱\ AB \Rightarrow AB = \frac{۱۰}{۱۱}CD \Rightarrow MA + MB = \frac{۱۰}{۱۱} \times ۱۱x = ۱۰x$$
$$\begin{cases} MA \times MB = ۲۴x^{۲} \\ MA + MB = ۱۰x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MA = ۴x \\ MB = ۶x \end{cases}$$

پس به نسبت $\frac{۲}{۳} = \frac{۴}{۶}$ قطع می‌کند.

۵ گزینه ۲

مطابق فرض مسئله شکل را کامل می‌کنیم:

در مثلث $\overset{\Delta}{OMH}$ فیثاغورس را می‌نویسیم:

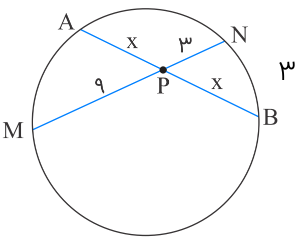


$$۴^{۲} + MH^{۲} = \left(\sqrt{۵۲}\right)^{۲} \Rightarrow MH = ۶ \Rightarrow NH = ۶$$

در مثلث $\overset{\Delta}{OPH}$ نیز فیثاغورس را می‌نویسیم:

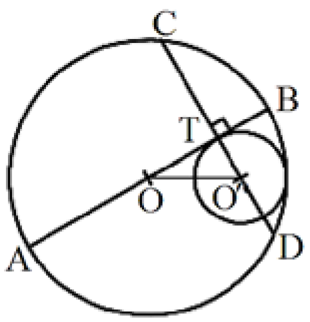
$$۴^{۲} + PH^{۲} = ۵^{۲} \Rightarrow PH = ۳ \Rightarrow PN = ۶ - ۳ = ۳$$

کوتاه‌ترین وتر، وتری است که P وسط آن باشد، پس مطابق شکل رابطهٔ طولی را می‌نویسیم:



$$۳ \times ۹ = x \times x \Rightarrow x = ۳\sqrt{۳} \Rightarrow AB = ۶\sqrt{۳}$$

۶ گزینه ۳



چون دو دایره مماس داخل‌اند: $OO' = R - R' = ۳ - ۱ = ۲$

$$\overset{\Delta}{OTO'} : \hat{T} = ۹۰^\circ \Rightarrow OT = \sqrt{OO'^۲ - O'T^۲} = \sqrt{۴ - ۱} = \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow AT = ۳ + \sqrt{۳}\ ,\ TB = ۳ - \sqrt{۳}$$

می‌دانیم قطر عمود بر هر وتر، آن وتر را نصف می‌کند؛ بنابراین: $CT = TD$

$$AT.TB = CT.TD \Rightarrow CT^۲ = (۳ + \sqrt{۳})(۳ - \sqrt{۳}) = ۶ \Rightarrow CT = \sqrt{۶}$$

۷ گزینه ۴

زاویهٔ C محاطی است، بنابراین:

$$\overset{\frown}{BAD} = ۲ \times ۵۰^\circ = ۱۰۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۸۰^\circ$$

ازطرفی:

$$BC = AB \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AB} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = ۱۸۰^\circ - (۲ \times ۸۰^\circ) = ۲۰^\circ$$

بنابراین:

$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AD}}{۲} = \frac{۸۰^\circ - ۲۰^\circ}{۲} = ۳۰^\circ$$

۸ گزینه ۱

زاویهٔ A محاطی است، پس:

$$\overset{\frown}{BT} = ۲\hat{A} = ۲x$$

ازطرفی کمان‌های نظیر وترهای مساوی برابرند، پس:

$$\overset{\frown}{AT} = \overset{\frown}{AB} = \frac{۳۶۰^\circ - ۲x}{۲} = ۱۸۰^\circ - x$$

ازطرفی:

$$\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AT} - \overset{\frown}{BT}}{۲} \Rightarrow ۴۵^\circ = \frac{۱۸۰^\circ - x - ۲x}{۲} \Rightarrow ۳x = ۹۰^\circ \Rightarrow x = ۳۰^\circ$$

۹ گزینه ۳

زاویهٔ XAD زاویهٔ ظلّی است، بنابراین:

$$X\hat{A}D = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow ۴۰ = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AB} = ۸۰^\circ$$

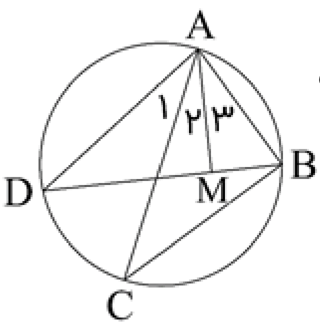
ازطرفی $D\hat{B}C$ محاطی است، پس:

$$D\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{DC}}{۲} \Rightarrow ۲۰ = \frac{\overset{\frown}{DC}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{DC} = ۴۰^\circ$$

همچنین زاویهٔ BDC محاطی است، پس:

$$B\hat{D}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow B\hat{D}C = \frac{۳۶۰^\circ - (۸۰^\circ + ۸۰^\circ + ۴۰^\circ)}{۲} = \frac{۱۶۰^\circ}{۲} \Rightarrow B\hat{D}C = ۸۰^\circ$$

۱۰ گزینه ۴



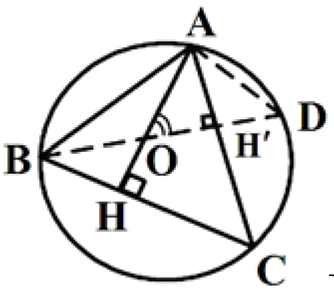
$$\text{طبق فرض} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{A}_۳ \Rightarrow \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = \hat{A}_۳ + \hat{A}_۲$$

$$\left.\begin{array}{l} D\hat{A}M = B\hat{A}C \\ \hat{D} = \hat{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ADM} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DM}{BC}$$

$$\Rightarrow AD \times BC = AC \times DM$$

۱۱ گزینه ۴

باتوجه‌به اینکه O محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC است، پس ارتفاع گذرنده از رأس B بر پاره‌خط BD واقع است. داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{AOH'} : A\hat{O}D + C\hat{A}O = ۹۰^\circ \\ \overset{\triangle}{ACH} : A\hat{C}H + C\hat{A}O = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{O}D = A\hat{C}H$$

$$\xrightarrow{A\hat{C}H = A\hat{D}O = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}} A\hat{O}D = A\hat{D}O$$

۱۲ گزینه ۱

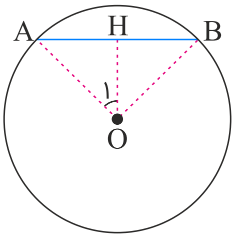
در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع و نیمساز بر هم منطبق هستند، پس:

$$\hat{B} = \hat{C} = ۷۰^\circ \Rightarrow B\hat{A}H = H\hat{A}C = ۲۰^\circ \Rightarrow \begin{cases} \overset{\frown}{CM} = \overset{\frown}{DM} = ۴۰^\circ \\ \overset{\frown}{ADMC} = ۱۴۰^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AD} = ۶۰^\circ \Rightarrow A\hat{M}D = ۳۰^\circ$$

۱۳ گزینه ۴

اگر در شکل زیر، کمان کوچک‌تر $\overset{\frown}{AB}$ برابر α و $AB = ۵\sqrt{۳}$ باشد، چنانچه از O، عمود OH را بر AB رسم کنیم، H وسط AB است و داریم:



$$AH = \frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH داریم:

$$\sin \hat{O}_۱ = \frac{AH}{OA} \Rightarrow \sin \hat{O}_۱ = \frac{\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}}{۵}$$

$$\Rightarrow \sin \hat{O}_۱ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \hat{O}_۱ = ۶۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۲\hat{O}_۱ = ۱۲۰^\circ$$

۱۴ گزینه ۱

$$E\hat{M}F = \frac{\overset{\frown}{GH} - \overset{\frown}{EF}}{۲} = \frac{۱۶۰^\circ - ۴۰^\circ}{۲} = \frac{۱۲۰^\circ}{۲} = ۶۰^\circ$$

$E\hat{M}F = D\hat{M}C$ (متقابل به رأس‌اند)

$$D\hat{M}C = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{DC}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{DC} = ۱۲۰^\circ$$

۱۵ گزینه ۴

$$\widehat{D} = ۱۴۰^\circ = \frac{\overset{\frown}{A'BB'}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{A'BB'} = ۲۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{A'DB'} = ۳۶۰^\circ - ۲۸۰^\circ = ۸۰^\circ$$

$$\widehat{M} = \frac{\overset{\frown}{A'DB'} - \overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow ۳۰^\circ = \frac{۸۰^\circ - \overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۲۰^\circ$$

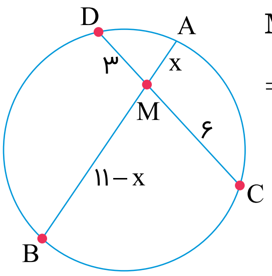
۱۶ گزینه ۴

$$\frac{MD}{MC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow MD = k\ ,\ MC = ۲k$$

$$DC = MD + MC = k + ۲k = ۹ \Rightarrow ۳k = ۹ \Rightarrow k = ۳$$

$$\Rightarrow MD = ۳\ ,\ MC = ۲ \times ۳ = ۶$$

فرض می‌کنیم $MA = x$ باشد، پس $MB = ۱۱ - x$ است و به کمک روابط طولی در دایره داریم:



$$MA \times MB = MC \times MD \Rightarrow x \times (۱۱ - x) = ۶ \times ۳$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۱۱x + ۱۸ = ۰ \Rightarrow (x - ۲)(x - ۹) = ۰ \Rightarrow x = ۲\ ,\ x = ۹$$

وتر CD وتر AB را به نسبت $\frac{۹}{۲}$ قطع می‌کند.

۱۷ گزینه ۳

بنابر روابط طولی $HB \times HA = HC \times HD$ یعنی:

$$۴ \times (HE + ۲) = ۳ \times ۸ \Rightarrow HE = ۴$$

اکنون بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث EHC:

$$EC = \sqrt{HC^۲ + HE^۲} = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵$$

در نهایت بنابر رابطه طولی در دایره $EC \times EF = EA \times EB$، درنتیجه:

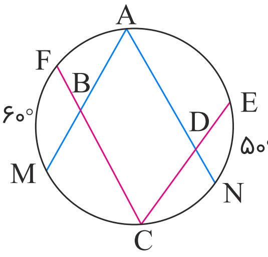
$$۵ \times EF = ۲ \times ۸ \Rightarrow EF = \frac{۱۶}{۵} = ۳/۲$$

پس:

$$FC = FE + EC = ۳/۲ + ۵ = ۸/۲$$

۱۸ گزینه ۱

باتوجه‌به نمادگذاری روی شکل:



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{MCN}\\ ۵۰°\hat{C}=\frac{۱}{۲}F\overset{\frown}{AE}\end{array}\right. \xrightarrow{+} \hat{A}+\hat{C}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{MCN}+F\overset{\frown}{AE})$$

ازطرفی داریم:

$$\overset{\frown}{MCN}+۵۰°+F\overset{\frown}{AE}+۶۰°=۳۶۰°$$

پس:

$$\overset{\frown}{MCN}+F\overset{\frown}{AE}=۲۵۰°$$

بنابراین:

$$\hat{A}+\hat{C}=\frac{۲۵۰°}{۲}=۱۲۵°$$

۱۹ گزینه ۳

زاویهٔ CAB محاطی است، بنابراین:

$$C\hat{A}B=\frac{\overset{\frown}{CDB}}{۲}\Rightarrow ۳x=\frac{۴x+\overset{\frown}{BD}}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{BD}=۲x$$

زاویهٔ CMA زاویهٔ بین امتداد دو وتر است، پس:

$$C\hat{M}A=\frac{\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD}}{۲}\Rightarrow x=\frac{\overset{\frown}{AC}-۲x}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{AC}=۴x$$

ازطرف‌دیگر چون AB قطر دایره است، پس:

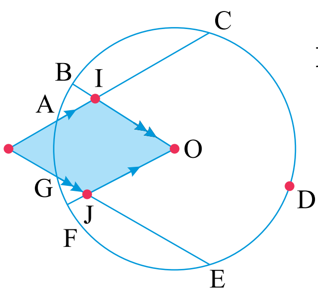
$$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DB}=۱۸۰°\Rightarrow ۴x+۴x+۲x=۱۸۰°\Rightarrow x=۱۸°$$

درنهایت می‌توان نوشت:

$$\overset{\frown}{AC}=۴x=۴\times ۱۸°=۷۲°$$

۲۰ گزینه ۲

وترهای AC و GE را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را مطابق شکل در نقطه M، خارج دایره، قطع کنند.



$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{CDE}-\overset{\frown}{AG}}{۲}=\frac{۱۲۰°-۳۰°}{۲}=۴۵°$$

$$\begin{cases}OI\|MJ\\ MI\|OJ\end{cases}$$

چهارضلعی MIOJ متوازی‌الاضلاع است.

$$\Rightarrow B\hat{O}F=\hat{M}=۴۵°$$