تمرین سری سوم

۱ گزینه ۴

رابطهٔ مقایسه‌ای قانون کولن به‌صورت زیر است:

$$\frac{F'}{F}=\frac{q'_۱q'_۲}{q_۱q_۲}\times\left(\frac{r}{r'}\right)^۲ \qquad (۱)$$

اگر بار ذرات ابتدا هم‌اندازه و ناهمنام باشد و بخشی از بار خالص یکی به دیگری انتقال یابد، اندازهٔ بار ذرات پس از انتقال نیز مساوی خواهد بود؛ یعنی:

$$\begin{cases} q_۱=+q\\ q_۲=-q\\ q'_۱=q-x\\ q'_۲=-q+x\Rightarrow |q'_۲|=q-x \end{cases} \qquad (۲)$$

بنابراین:

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}\frac{۴۰}{۹۰}=\frac{(q-x)(q-x)}{q.q}\Rightarrow\frac{۴}{۹}=\left(\frac{q-x}{q}\right)^۲\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{q-x}{q}$$

$$\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{q-۲}{q}\Rightarrow ۲q=۳q-۶\Rightarrow q=۶\,\mu C$$

۲ گزینه ۳

در هر فاصله‌ای، نیرویی که $q_۱$ بر $q_۲$ وارد می‌کند، ازنظر اندازه برابر با نیرویی است که $q_۲$ بر $q_۱$ وارد می کند. اما برای نصف شدن نیرو، کافی است که فاصله $\sqrt{۲}$ برابر شود. (نیرو با مربع فاصله نسبت عکس دارد.)

۳ گزینه ۱

نیرویی که دو ذرهٔ باردار به هم وارد می‌کنند با حاصل‌ضرب بارهای آن‌ها نسبت مستقیم و با مجذور فاصلهٔ بین دو ذره نسبت عکس دارد.

$$\begin{cases} F\propto q_۱q_۲\\ F\propto\frac{۱}{r^۲} \end{cases}\Rightarrow F\propto\frac{q_۱q_۲}{r^۲}\Rightarrow\quad \frac{F'}{F}=\frac{q'_۱q'_۲}{q_۱q_۲}\times\left(\frac{r}{r'}\right)^۲$$

$$\begin{cases} q_۱=q_۲=q\\ q'_۱=q-\frac{۲}{۵}q=\frac{۳}{۵}q\\ q'_۲=q+\frac{۲}{۵}q=\frac{۷}{۵}q\\ r'=\frac{\sqrt{۵}}{۵}r \end{cases}\Rightarrow\quad \frac{F'}{F}=\frac{(\frac{۳}{۵}q)(\frac{۷}{۵}q)}{q\times q}\times\left(\frac{r}{\frac{\sqrt{۵}}{۵}r}\right)^۲=\frac{۲۱}{۲۵}\times ۵=\frac{۲۱}{۵}\quad\Rightarrow\quad F'=\frac{۲۱}{۵}F$$

۴ گزینه ۳

نیروی بین دو ذرهٔ باردار با حاصل‌ضرب بارهای آن‌ها متناسب است و با مجذور فاصلهٔ آن‌ها رابطهٔ عکس دارد.

$$\frac{F'}{F}=\frac{q'_1q'_2}{q_1q_2}\times\left(\frac{r}{r'}\right)^2$$

ازآنجاکه:

$$\begin{cases}q_1=q_2=q\\ q'_1=q-x\\ q'_2=q+x\end{cases}$$

پس:

$$\frac{63}{64}=\frac{(q-x)(q+x)}{q.q}\Rightarrow\frac{63}{64}=\frac{q^2-x^2}{q^2}$$

$$\Rightarrow 64q^2-64x^2=63q^2\Rightarrow q^2=64x^2\Rightarrow q=8x$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{8}q=0/125q\Rightarrow\frac{x}{q}=12/5\%$$

۵ گزینه ۱

رابطهٔ مقایسه‌ای قانون کولن به‌صورت زیر است:

$$\frac{F'}{F}=\frac{q'_1q'_2}{q_1q_2}\times\left(\frac{r}{r'}\right)^2\Rightarrow\frac{F'}{F}=\frac{q_1(3q_2)}{q_1q_2}\times\left(\frac{r}{2r}\right)^2=\frac{3}{4}\Rightarrow F'=\frac{3}{4}F$$

یعنی نیروی بین ذره به‌اندازهٔ $\frac{1}{4}F$ کاهش می‌یابد یا می‌توان گفت نیروی بین دو ذره ۲۵٪ کم شده است.

۶

گزینه ۴

با توجه به شرایط اولیهٔ مسئله می‌توان نوشت:

$$F = \frac{kq_1q_2}{r^2} \Rightarrow F = \frac{k(4 \times 10^{-6})q_2}{r^2} \quad (I)$$

$$\begin{cases} q'_1 = \frac{75}{100}q_1 = \frac{3}{4}q_1 = \frac{3}{4}(4 \times 10^{-6})C = 3 \times 10^{-6}C \\ q'_2 = q_2 + \frac{25}{100}q_1 = q_2 + 1 \times 10^{-6}C \end{cases}$$

$$F' = \frac{kq'_1q'_2}{r^2} \Rightarrow \frac{150}{100}F = \frac{k(3 \times 10^{-6})(q_2 + 1 \times 10^{-6})}{r^2} \quad (II)$$

طرفین رابطهٔ II را به طرفین رابطهٔ I تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{150}{100} = \frac{(3 \times 10^{-6})\,(q_2 + 1 \times 10^{-6})}{(4 \times 10^{-6})\,(q_2)} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{3\,(q_2 + 10^{-6})}{4\,(q_2)}$$

طرفین را ضربدر $\frac{2}{3}$ می‌کنیم.

$$\frac{1}{1} = \frac{q_2 + 10^{-6}}{2q_2} \Rightarrow 2q_2 = q_2 + 10^{-6} \Rightarrow q_2 = 10^{-6}C = 1\mu C$$

۷

گزینه ۲

گام اول

الف) نیروی بین دو بار الکتریکی q_1 و q_2 که به فاصلهٔ r از یکدیگر قرار دارند F است. ← $F = k\frac{q_1q_2}{r^2}$

ب) اگر اندازه یکی از بارها و همچنین فاصلهٔ بین دو بار نیز نصف شود. ← $q'_1 = \frac{q_1}{2}\,,\ r' = \frac{r}{2}$

ج) نیروی بین آن‌ها چندبرابر می‌شود؟← $\frac{F'}{F} = ?$

گام دوم

کافی است قانون کولن را برای حالت دوم بنویسیم:

$$F' = k\frac{q'_1q_2}{r'^2} \Rightarrow F' = \frac{k\frac{q_1}{2}q_2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} \Rightarrow F' = 2k\frac{q_1q_2}{r^2} \Rightarrow F' = 2F$$

۸

گزینه ۲

گام اول

چند درصد از بار q_2 را به q_1 منتقل کنیم تا در همان فاصله، نیروی دافعهٔ بین بارهای الکتریکی بیشینه شود؟ ← هرگاه مجموع دو کمیت ثابت باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها زمانی بیشینه خواهد بود که دو مقدار باهم برابر باشند.

گام دوم

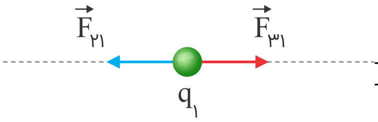
$$\text{مقدار ثابت} = (q_1 + q_2)_{\text{حالت اول}} = q_1 + 2q_1 = 3q_1$$

بنابراین در حالت دوم، بارها باهم برابر هستند و مقدارشان $q'_1 = q'_2 = \frac{3q_1}{2}$ است. درنتیجه درصد تغییرات بار q_2 برابر است با:

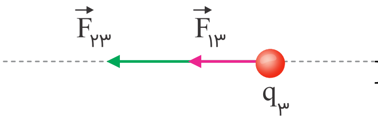
$$\frac{\Delta q_2}{q_2} \times 100 = \frac{q'_2 - q_2}{q_2} \times 100 = \frac{\frac{3q_1}{2} - 2q_1}{2q_1} \times 100 = -25\%$$

۹ گزینه ۳

با توجه به علامت بارها، نیروی خالص وارد بر $q_{۱}$ و $q_{۳}$ را به دست می‌آوریم:



$$F_{T_{۱}} = F_{۲۱} - F_{۳۱}$$
$$= k\frac{q \times ۲q}{x^{۲}} - k\frac{q \times ۴q}{۹x^{۲}} = \frac{kq^{۲}}{x^{۲}}(۲ - \frac{۴}{۹}) = \frac{۱۴}{۹}k\frac{q^{۲}}{x^{۲}}$$



$$F_{T_{۳}} = F_{۱۳} + F_{۲۳}$$
$$= k\frac{q \times ۴q}{۹x^{۲}} + k\frac{۲q \times ۴q}{۴x^{۲}} = \frac{kq^{۲}}{x^{۲}}(\frac{۴}{۹} + ۲) = \frac{۲۲}{۹}k\frac{q^{۲}}{x^{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{F_{T_{۱}}}{F_{T_{۳}}} = \frac{\frac{۱۴}{۹}k\frac{q^{۲}}{x^{۲}}}{\frac{۲۲}{۹}k\frac{q^{۲}}{x^{۲}}} = \frac{۱۴}{۲۲} = \frac{۷}{۱۱}$$

۱۰ گزینه ۱

در این سؤال اندازهٔ یک بار داده شده و اندازهٔ دو بار دیگر مجهول است. ابتدا به خواستهٔ سؤال دقت می‌کنیم که تنها اندازهٔ بار $q_{۲}$ را از ما می‌خواهد، پس نیازی به محاسبهٔ بار $q_{۱}$ نداریم، بنابراین باید تنها نیروی وارد بر بار $q_{۱}$ را محاسبه کنیم، زیرا می‌دانیم نیروی خالص وارد بر بار $q_{۱}$ صفر است و برای محاسبهٔ نیروی خالص وارد بر هر باری که صفر باشد اندازهٔ خود بار تأثیر و اهمیتی ندارد.

$$\Rightarrow \frac{|q_{۲}|}{۶^{۲}} = \frac{۱۲}{۱۰^{۲}} \Rightarrow |q_{۲}| = \frac{۳۶ \times ۱۲}{۱۰۰} = ۴/۳۲\,\mu C$$

بار $q_{۱}$ خارج از ناحیهٔ بین دو بار $q_{۲}$ و $q_{۳}$ در تعادل است پس باید $q_{۲}$ و $q_{۳}$ ناهم‌علامت باشند: $q_{۲} = +۴/۳۲\,\mu C$

۱۱ گزینه ۴

در حالت اول نیروی وارد از طرف هریک از بارها بر بار q' را به دست آورده و برآیند می‌گیریم:

$$F_{A} = k\frac{qq'}{r^{۲}} \quad , \quad F_{B} = k\frac{۴q \times q'}{r^{۲}} \Rightarrow F_{۱} = F_{B} - F_{A} = ۳k\frac{qq'}{r^{۲}}$$

بعد از تغییرات اعمال‌شده خواهیم داشت:

$$F'_{A} = k\frac{\frac{q}{۲} \times q'}{(\frac{r}{۲})^{۲}} = ۲k\frac{qq'}{r^{۲}} \quad , \quad F'_{B} = k\frac{۸q \times q'}{(۲r)^{۲}} = ۲k\frac{qq'}{r^{۲}} \Rightarrow F_{۲} = ۰$$

۱۲ گزینه ۴

به بار $q_۱$ دو نیروی الکتریکی از طرف بارهای $q_۲$ و $q_۳$ وارد می‌شود. چون بار $q_۲$ و فاصلهٔ آن تا بار $q_۱$ مشخص است، بردار نیروی الکتریکی که بار $q_۲$ به بار $q_۱$ وارد می‌کند را به دست می‌آوریم. جهت نیروی $\vec{F}_{۲۱}$ در خلاف جهت محور y است، پس:

$$\vec{F}_{۲۱} = (-k\frac{|q_۱||q_۲|}{r_{۱۲}^۲})\vec{j} = (-۹۰ \times \frac{۲ \times ۲}{(۳۰)^۲})\vec{j} = (-۰/۴\,N)\vec{j}$$

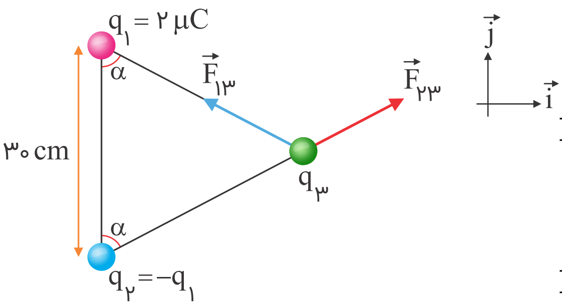
باتوجه‌به اینکه $\vec{F}_{net(۱)}$ مشخص است، بردار نیروی الکتریکی که بار $q_۳$ به $q_۱$ وارد می‌کند، برابر است با:

$$\vec{F}_{net(۱)} = \vec{F}_{۲۱} + \vec{F}_{۳۱} \Rightarrow ۰/۵\vec{i} - ۰/۸\vec{j} = -۰/۴\vec{j} + \vec{F}_{۳۱} \Rightarrow \vec{F}_{۳۱} = ۰/۵\vec{i} - ۰/۴\vec{j}$$

طبق قانون سوم نیوتون، بردار نیرویی که بار $q_۱$ به بار $q_۳$ وارد می‌کند برابر است با:

$$\vec{F}_{۱۳} = -\vec{F}_{۳۱} = -۰/۵\vec{i} + ۰/۴\vec{j}$$

طبق تقارنی که در شکل بین بارهای $q_۲$ و $q_۱$ نسبت به بار $q_۳$ وجود دارد، برآیند نیروی $\vec{F}_{۲۳}$ برابر است با:



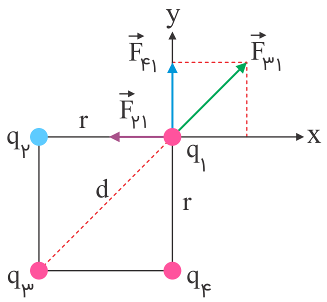
$$\vec{F}_{۲۳} = +۰/۵\vec{i} + ۰/۴\vec{j}$$

اندازهٔ برآیند نیروهای وارد بر بار $q_۳$ برابر است با:

$$\vec{F}_{net(۳)} = \vec{F}_{۱۳} + \vec{F}_{۲۳} = +۰/۸\vec{j} \Rightarrow |\vec{F}_{net(۳)}| = ۰/۸\,N$$

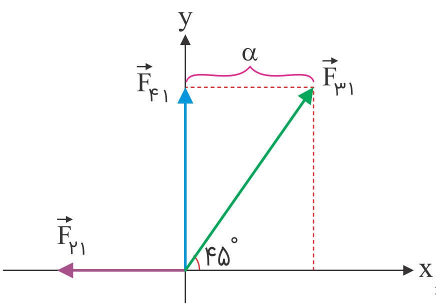
۱۳ گزینه ۲

مطابق شکل زیر، نیروهای وارد بر بار $q_۱$ را رسم کرده و اندازهٔ هر یک را به دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} F_{۲۱} = k\frac{q_۱q_۲}{r^۲} = \frac{۹ \times ۱۰^۹ \times (۴ \times ۱۰^{-۶}) \times (۳ \times ۱۰^{-۶})}{(۶ \times ۱۰^{-۲})^۲} = ۳۰\,N \\ F_{۳۱} = k\frac{q_۱q_۳}{d^۲} = \frac{۹ \times ۱۰^۹ \times (۴ \times ۱۰^{-۶}) \times (۱۲ \times ۱۰^{-۶})}{(۶\sqrt{۲} \times ۱۰^{-۲})^۲} = ۶۰\,N \\ F_{۴۱} = k\frac{q_۱q_۴}{r^۲} = \frac{۹ \times ۱۰^۹ \times (۴ \times ۱۰^{-۶}) \times (۵ \times ۱۰^{-۶})}{(۶ \times ۱۰^{-۲})^۲} = ۵۰\,N \end{cases}$$

در ادامه با انتخاب محورهای مختصات داریم ($\frac{\sqrt{۲}}{۲} \simeq ۰/۷$):



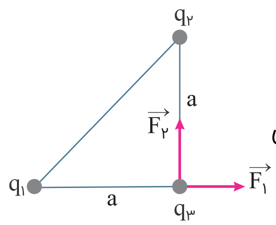
$$\begin{cases} \vec{F}_{۲۱} = -۳۰\vec{i} + ۰\vec{j} \\ \vec{F}_{۳۱} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = F_{۳۱}\cos\theta = ۶۰\cos ۴۵^\circ \simeq ۴۲ \\ \beta = F_{۳۱}\sin\theta = ۶۰\sin ۴۵^\circ \simeq ۴۲ \end{cases} \\ \vec{F}_{۴۱} = ۰\vec{i} + ۵۰\vec{j} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{۳۱} \simeq ۴۲\vec{i} + ۴۲\vec{j}$$

نیروی برآیند : $\vec{R} = \vec{F}_{۲۱} + \vec{F}_{۳۱} + \vec{F}_{۴۱} \quad \Rightarrow \vec{R} = (-۳۰ + ۴۲ + ۰)\vec{i} + (۰ + ۴۲ + ۵۰)\vec{j} = ۱۲\vec{i} + ۹۲\vec{j}$

۱۴ گزینه ۲

بار $q_۱$ بار $q_۳$ را در شکل (الف) با نیروی $\vec{F}_۱=(۲۰\,N)\vec{i}$ دفع می‌کند. در شکل (ب) فاصلهٔ $q_۱$ از $q_۳$ دو برابر شده است؛ پس بزرگی نیرویی که $q_۱$ به $q_۳$ وارد می‌کند، $\frac{۱}{۴}$ شکل (الف) می‌شود.

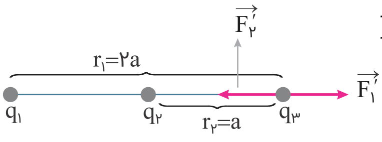


(الف)

$$\frac{۱}{۴}\text{برابر} \Leftarrow F \propto \frac{۱}{r^۲}\,(\text{برابر}\,۲^۲) \Rightarrow \vec{F'}_۱ = \frac{۱}{۴}\vec{F}_۱ = (۵\,N)\vec{i}$$

بار $q_۲$ بار $q_۳$ را در شکل (الف) با نیروی $\vec{F}_۲=(-۳۰\,N)\vec{j}$ جذب می‌کند. در شکل (ب) هم با نیرویی در راستای محور x همین کار را می‌کند.

$$\vec{F'}_۲ = (-۳۰\,N)$$



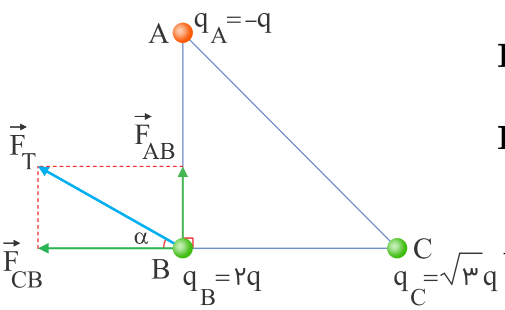
(ب)

بنابراین، برآیند نیروهای وارد بر بار $q_۳$ در شکل (ب) برابر است با:

$$\vec{F}_{۲,۳} = \vec{F'}_۱ + \vec{F'}_۲ = (۵\,N)\vec{i} + (-۳۰\,N)\vec{i} = (-۲۵\,N)\vec{i}$$

۱۵ گزینه ۲

نیروی الکتریکی بین بارهای q_A و q_B به‌صورت جاذبه و نیروی الکتریکی بین بارهای q_C و q_B به‌صورت دافعه است.



$$F_{CB} = k\frac{q_C q_B}{r^۲} = k\frac{(\sqrt{۳}q)(۲q)}{r^۲}$$

$$F_{AB} = k\frac{q_A q_B}{r^۲} = k\frac{(q)(۲q)}{r^۲}$$

$$\tan\alpha = \frac{F_{AB}}{F_{CB}} = \frac{k\frac{(q)(۲q)}{r^۲}}{k\frac{(\sqrt{۳}q)(۲q)}{r^۲}} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \alpha = ۳۰^\circ$$